

التفاضل والتكامل

نموذج أسئلة

(النموذج «أ»)

تعليمات مهمة

- عدد أسئلة كراسة الامتحان (١٨) سؤالاً.
- عدد صفحات كراسة الامتحان (٢٨) صفحة.
- تأكد من ترقيم الأسئلة، ومن عدد صفحات كراسة الامتحان، فهي مسئوليتك.
- زمن الاختبار **(ساعتان)**.
- الدرجة الكلية للاختبار (٣٠) درجة.

عزيزي الطالب .. اقرأ هذه التعليمات بعناية :

١ اقرأ التعليمات جيدًا سواء في مقدمة كراسة الامتحان أو مقدمة الأسئلة، وفي ضوئها أجب عن الأسئلة.

٢ اقرأ السؤال بعناية، وفكر فيه جيداً قبل البدء في إجابته.

٣ استخدم القلم الجاف الأزرق للإجابة ، والقلم الرصاص في الرسومات، ولا تستخدم مزيل الكتابة .

٤ عند إجابتك للأسئلة المقالية، أجب في المساحة المخصصة للإجابة وفي حالة الحاجة لمساحة أخرى يمكن استكمال الإجابة في صفحات المسودة مع الإشارة إليها ، وإن إجابتك بأكثر من إجابة سوف يتم تقديرها .

مثال:

....

....

....

٥ عند إجابتك عن الأسئلة المقالية الاختيارية أجب عن **(أ) أو (ب) فقط** .

٦ **عند إجابتك عن أسئلة الاختيار من متعدد إن وجدت:**

ظلل الدائرة ذات الرمز الدال على الإجابة الصحيحة تظليلاً كاملاً لكل سؤال.

مثال: الإجابة الصحيحة (جـ) مثلاً

أ	
ب	
جـ (مظللة)	**الإجابة الصحيحة مثلاً**
د	

- في حالة ما إذا أجبت إجابة خطأ، ثم قمت بالشطب وأجبت إجابة صحيحة تحسب الإجابة صحيحة.
- وفي حالة ما إذا أجبت إجابة صحيحة ، ثم قمت بالشطب وأجبت إجابة خطأ تحسب الإجابة خطأ.

ملحوظة :

في حالة الأسئلة الموضوعية (الاختيار من متعدد) إذا تم التظليل على أكثر من رمز أو تم تكرار الإجابة ؛ تعتبر الإجابة خطأ.

٧ يسمح باستخدام الآلة الحاسبة.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

(١) إذا كان ص = جا^ن س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ن جا^(ن-١) س (ب) ن جاس جتاس

(ج) ن ص ظتاس (د) ن ص جتاس

$\frac{ءص}{ءس}$ = ن جا^(ن-١) س جتاس × $\frac{جاس}{جاس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ن جا^ن س $\frac{جتاس}{جاس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ن ص ظتاس

(٢) إذا كانت س = ٥ ن + ٣ ، ص = ١٦ ن^{٢} + ٩

فإن قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند ن = ٥ تساوي ....

(أ) $\frac{٣٢}{٥}$ (ب) ٣٢

(ج) $\frac{١}{٣٢}$ (د) $\frac{٥}{٣٢}$

$\frac{ءس}{ءن} = ٥$ ، $\frac{ءص}{ءن} = ٣٢ ن$

$\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{ءص}{ءن}\right) \div \left(\frac{ءس}{ءن}\right) = \frac{٣٢ ن}{٥}$ عندما ن = ٥

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣٢ \times ٥}{٥} = ٣٢$

③ إذا كانت ص = أ س + ب دالة خطية ، س تتغير بمعدل ثابت .

(i) هل ص تتغير بمعدل ثابت ؟ **فسر ذلك.**

(ii) هل ص تتغير بنفس معدل تغير س ؟ **فسر ذلك.**

(iii) متى يتساوى المعدلان ؟

∵ ص = أ س + ب   دالة خطية ∴ أ ثابت   باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ن

∴ $\frac{دص}{دن} = أ \frac{دس}{دن}$ ∵ $\frac{دس}{دن}$ = مقدار ثابت (معطى)

∴ $\frac{دص}{دن}$ = مقدار ثابت   ∴ ص تتغير بمعدل ثابت (i)

∵ $\frac{دص}{دن} = (أ)(\frac{دس}{دن})$

∴ معدل تغير ص = (معدل تغير س) أ

∴ لا يتساوى معدل تغير كل من ص، س (ii)

يتساوى المعدلان عندما يكون أ = ١ (iii)

④ إذا كانت س = قا ع ، $\sqrt{\text{ص}}$ = ظا ع ،

أثبت: أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = ٢$

∵ س² = قا²ع = ظا²ع + ١

، ص = ظا²ع

∴ س² = ص + ١ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

∴ ٢س = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بالاشتقاق مرة أخرى

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = ٢$

⑤ $\sum_{ن=.}^{\infty} \frac{١}{ن!} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

● (أ) $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$ ⠀⠀⠀ (ب) $\int_{١}^{هـ} \frac{١}{س} \, ءس$

(ج) $\frac{ء}{ءس}\left[لو_{هـ} س\right]$ ⠀⠀⠀ (د) $هـ^{لو_{هـ} س}$

متسلسلة تايلور

كتاب الطالب ص ٣٨ طبعة ٢٠١٦-٢٠١٧م
رابع سطر

$\sum_{ن=.}^{\infty} \frac{١}{ن!} = هـ$

والاختيار (أ)

$\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} = هـ$

٦ إذا كانت ص = $هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

أ $هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$

ب $(س - ١) هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$

● ٢ $(س - ١) هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$

د $هـ^{(٢ س - ٢)}$

ص = $هـ^{س^٢ - ٢ س}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$ $(٢ س - ٢)$

= ٢ $(س - ١)$ $هـ^{(س^٢ - ٢ س)}$

(٧) **أوجد** معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص = س^{٣} − ١٨ لوهـ س عند نقطة عليه ، إحداثيها السيني يساوي ٢

∵ ص = س^{٣} − ١٨ لوهـ س ⟸ ص| = ٨ − ١٨ لوهـ ٢ (س = ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢} − ١٨ ($\frac{١}{س}$)

$\frac{دص}{دس}$| (س = ٢) = ١٢ − ١٨ × $\frac{١}{٢}$ = ١٢ − ٩ = ٣

∴ ميل المماس = ٣ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة المماس : ص − (٨ − ١٨ لوهـ ٢) = ٣ (س − ٢)

معادلة العمودي : ص − (٨ − ١٨ لوهـ ٢) = $\frac{-١}{٣}$ (س − ٢)

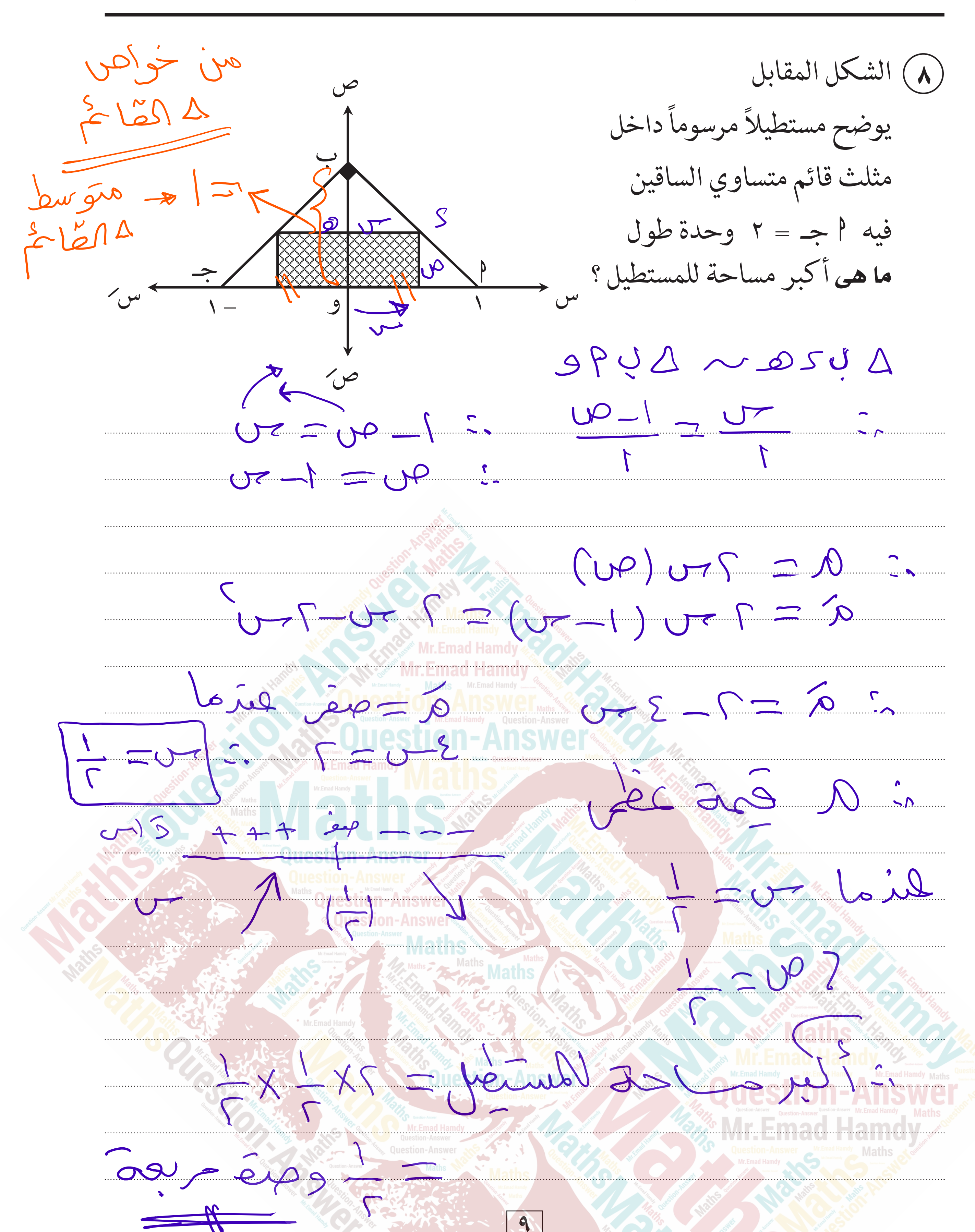
⑧ الشكل المقابل

يوضح مستطيلاً مرسوماً داخل

مثلث قائم متساوي الساقين

فيه ٩ جـ = ٢ وحدة طول

ما هي أكبر مساحة للمستطيل ؟



⑨ $\int_{1}^{2} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}^{2} \text{س}}{\text{س}}$ ء س = ...

(أ) $\frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}} 2)^{2}$ (ب) $2(\text{لو}_{\text{هـ}} 2)^{2}$ (ج) $(\text{لو}_{\text{هـ}} 2)^{2}$ (د) $\text{لو}_{\text{هـ}} 4$

$\int_{1}^{2} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}^{2} \text{س}}{\text{س}}$ ء س

$= 2\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})$ ء س $=$

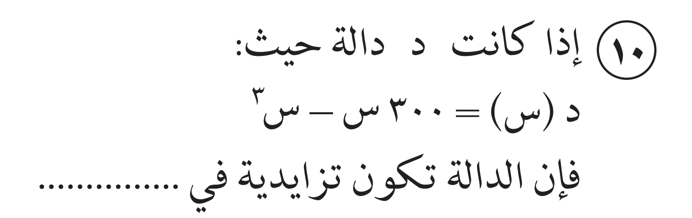
د(س) دَ(س)

مشتقة الدالة ← الدالة

$\frac{(\text{الدالة})^{ن+1}}{ن+1} + ث$

$= 2\left[\frac{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^{2}}{2}\right]_{1}^{2}$

$= (\text{لو}_{\text{هـ}} 2)^{2} - (\text{لو}_{\text{هـ}} 1)^{2} = (\text{لو}_{\text{هـ}} 2)^{2}$


(١٠) إذا كانت د دالة حيث:

د (س) = ٣٠٠ س − س^{٣}

فإن الدالة تكون تزايدية في ....

Ⓐ]−∞ ، ١٠[،]١٠ ، ∞[

Ⓑ]−١٠ ، ١٠[

Ⓒ]صفر ، ١٠[فقط

Ⓓ]صفر ، ∞[

∵ د(س) = ٣٠٠س − س^{٣}

∴ دَ(س) = ٣٠٠ − ٣س^{٢}

دَ(س) = صفر عندما ٣س^{٢} = ٣٠٠

س^{٢} = ١٠٠

∴ س = ١٠ أو −١٠

− − − −١٠ + + + ١٠ − − −

الدالة تزايدية في]−١٠ ، ١٠[

(١١) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق ومعرفة لجميع قيم س الحقيقية،

ولها الخصائص الآتية:

(١) دَ (س) = أ س^٢ + ب س حيث أ ، ب أعداد حقيقية

(٢) دَ (١) = ٦ ، دً (١) = ١٨ ،

(٣) $\int_{1}^{2}$ د (س) ء س = ١٨

فأوجد: د (س) ؟

الحل:

∵ دَ (١) = ٦ ∴ أ(١)^٢ + ب(١) = ٦

∴ أ + ب = ٦ ← (١)

دً (س) = ٢ أ س + ب ⇐ ∵ دً (١) = ١٨ ∴ ٢ أ + ب = ١٨ ← (٢)

بحل المعادلتين معًا ∴ أ = ١٢ ، ب = −٦

∴ دَ (س) = ١٢ س^٢ − ٦ س

∴ د (س) = ∫ (١٢ س^٢ − ٦ س) ء س = ٤ س^٣ − ٣ س^٢ + ث

∴ $\int_{1}^{2}$ (٤ س^٣ − ٣ س^٢ + ث) ء س = ١٨

∴ [س^٤ − س^٣ + ث س]$_{1}^{2}$ = ١٨

∴ (١٦ − ٨ + ٢ث) − (١ − ١ + ث) = ١٨

∴ ٨ + ث = ١٨ ∴ ث = ١٠

∴ الدالة ← د (س) = ٤ س^٣ − ٣ س^٢ + ١٠

(١٢) أوجد: $\int_{0}^{5} |\text{س} - ٣| \, \text{ءس}$ **(اكتب خطوات الحل).**

$$\int_{0}^{5} |\text{س} - ٣| \, \text{ءس} = \int_{0}^{3} (-\text{س} + ٣) \, \text{ءس} + \int_{3}^{5} (\text{س} - ٣) \, \text{ءس}$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\text{س}^2 + ٣\text{س}\right]_{0}^{3} + \left[\tfrac{1}{2}\text{س}^2 - ٣\text{س}\right]_{3}^{5}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2} \times ٩ + ٩\right) - \text{صفر} + \left(\tfrac{1}{2} \times ٢٥ - ١٥\right) - \left(\tfrac{1}{2} \times ٩ - ٩\right)$$

$$= (٤٫٥) + (-٢٫٥) - (-٤٫٥)$$

$$= ٩ - ٢٫٥ = ٦٫٥$$

لاحظ أن:

$$|\text{س} - ٣| = \begin{cases} \text{س} - ٣ & \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٣ & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

(١٣) إذا كانت د دالة حيث :

د $(س) = س^{٢}$ هـ^{كس} ، ك ثابت

، كان للدالة نقطة حرجة عند س $= \frac{٢}{٣}$

فإن ك = ...

(أ) ✓ -٣ (ب) $-\frac{٣}{٢}$

(ج) $-\frac{١}{٣}$ (د) صفر

د $(س) = س^{٢}$ هـ^{كس}

د$'(س) = ٢س$ هـ^{كس} + ك $س^{٢}$ هـ^{كس}

صفر = س هـ^{كس} $(٢ + كس)$ ⟸ ك س = -٢

∴ س = $\frac{-٢}{ك}$ ← عوضها نقطة حرجة

∴ $\frac{-٢}{ك} = \frac{٢}{٣}$ ∴ **ك = -٣**

(١٤) إذا كانت د دالة حيث

د (س) = $\frac{\text{لوهـ س}}{\text{س}}$ ، فإن القيمة العظمى المطلقة للدالة د هي ....

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{\text{هـ}}$ (جـ) - هـ (د) د ليس لها قيمة عظمى مطلقة

د (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ لوهـ س   س > صفر

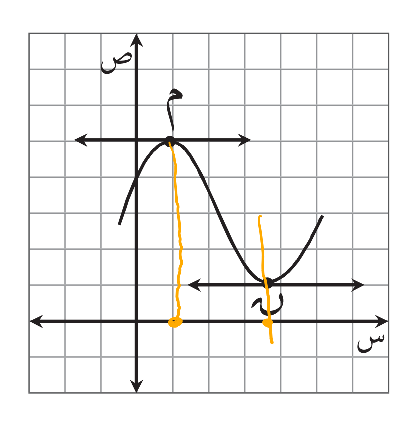
دَ (س) = $\frac{-1}{\text{س}^2}$ لوهـ س + $\frac{1}{\text{س}}$ × $\frac{1}{\text{س}}$ = $\frac{1}{\text{س}^2}$ (١ - لوهـ س)

∴ دَ (س) = صفر   اذا   لوهـ س = ١   ∴ س = هـ

+ + + + + + | - - - - -

صفر   هـ

القيمة العظمى ← $\frac{1}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{لوهـ هـ}}{\text{هـ}}$ = د (هـ)



(١٥) أجب عن أحد السؤالين التاليين فقط:

(أ) الشكل المقابل:

يمثل الدالة د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

حيث أ ، ب ، جـ ، ء ثوابت .

بيِّن: أن الأحداثي السيني للنقطتين م ، ں

يعطي بالعلاقة: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٣ أ جـ}}{٣ أ}$

(ب) **أوجد:** القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) = ١٠ س هـ$^{-س}$

، س ∈ [٠ ، ٤]

(أ)

د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

دَ(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

م ، ں نقطتان حرجتان «ميل المماس عندهما = صفر»

∴ ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ = صفر

معادلة من الدرجة الثانية في س

وحلها هو

س = $\frac{-٢ب \pm \sqrt{(٢ب)^{٢} - ٤(٣أ)(جـ)}}{٢(٣أ)}$

∴ س = $\frac{-٢ب \pm \sqrt{٤ب^{٢} - ٤(٣أ)(جـ)}}{٢(٣أ)}$ = $\frac{-٢ب \pm ٢\sqrt{ب^{٢} - ٣أجـ}}{٢(٣أ)}$

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٣أجـ}}{٣أ}$ وهما احداثيات سينية للنقطتين الحرجتين م ، ں

∵ د(س) = ١٠ س هـ^-س ، س ∈ [٠ ، ٤]

∴ دَ(س) = ١٠ هـ^-س + ١٠ س (−هـ^-س)

صفر = ١٠ هـ^-س (١ − س)

س = ١ عندها نقطة حرجة ∈] ٠ ، ٤ [

∴ د(٠) = ١٠(٠) هـ^-(٠) = صفر «قيمة صغرى مطلقة»

د(١) = ١٠ (هـ^-١) = $\frac{١٠}{هـ}$ ≃ ٣٫٦٧٨٧٩ «قيمة عظمى مطلقة»

د(٤) = (١٠)(٤) هـ^-٤ = $\frac{٤٠}{هـ^٤}$ ≃ ٠٫٧٣٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة عند س = ١ وهي ($\frac{١٠}{هـ}$)

و « « صغرى « « س = ٠ وهي (صفر)

(١٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى $\text{ص} = \text{٣ س}^{\text{٢}}$، المستقيم ص = ٦ س دورة كاملة حول محور السينات يساوي ....

(أ) $\pi \int_{\text{٠}}^{\text{٣}} (\text{٦ س} - \text{٣ س}^{\text{٢}})^{\text{٢}} \, \text{ءس}$

(ب) $\pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٦ س} - \text{٣ س}^{\text{٢}})^{\text{٢}} \, \text{ءس}$

(ج) $\pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٩ س}^{\text{٤}} - \text{٣٦ س}^{\text{٢}}) \, \text{ءس}$

(د) $\pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٣٦ س}^{\text{٢}} - \text{٩ س}^{\text{٤}}) \, \text{ءس}$

نقط التقاطع $\text{٣س}^{\text{٢}} = \text{٦س}$

$\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٦س} = \text{صفر}$

$\text{٣س}(\text{س} - \text{٢}) = \text{٠}$

س = ٠ ، س = ٢

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \left((\text{٦س})^{\text{٢}} - (\text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}\right) \text{ءس}$

$= \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٣٦س}^{\text{٢}} - \text{٩س}^{\text{٤}}) \, \text{ءس}$

(١٧) مساحة المنطقة المحدودة بين المنحنيين

ص = س٢ ، ص = | س | تساوي ....

(أ) ٢ $\int_{-1}^{1}$ (س٢ – س) ء س

(ب) $\int_{0}^{1}$ (س – س٢) ء س

(ج) ● ٢ $\int_{0}^{1}$ (س – س٢) ء س

(د) $\int_{-1}^{1}$ (س – س٢) ء س

نقط التقاطع : س٢ = |س|

س٢ – |س| = صفر

|س|٢ – |س| = ٠ ⟸ |س| (|س| – ١) = صفر

∴ |س| = ٠ أو |س| = ١

س = ٠ س = ±١

∴ م = $\int_{0}^{1}$ (س – س٢) ء س + $\int_{-1}^{0}$ (–س – س٢) ء س

من تطابق المنطقتين

∴ م = ٢ $\int_{0}^{1}$ (س – س٢) ء س

(١٨) أجب عن أحد السؤالين التاليين فقط:

(أ) استخدم التكامل بالتجزئ لإيجاد

$\int$ س^{٣} لوهـ س ء س

(ب) **أوجد:** $\int$ ٣ س $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ ء س

(أ) $\int$ س^{٣} لوهـ س ء س

ص = لوهـ س ، ءع = س^{٣} ءس

ءص = $\frac{١}{\text{س}}$ ءس ، ع = $\frac{١}{٤}$ س^{٤}

= $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لوهـ س − $\frac{١}{٤}$ $\int$ س^{٤} · $\frac{١}{\text{س}}$ ءس

= $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لوهـ س − $\frac{١}{٤}$ $\int$ س^{٣} ءس

= $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لوهـ س − $\frac{١}{١٦}$ س^{٤} + ث #

(ب) $\int$ ٣س $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ ءس

ص = ٣ ، ءص = (صفر) ءس

ءع = س (١ + س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ ءس

ءع = $\frac{١}{٢}$ (١ + س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ (٢س) ءس

ع = $\frac{١}{٢}$ $\frac{(١ + \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$

∴ التكامل = ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(١ + \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ − $\int$ صفر ءس

= (١ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث = $\sqrt{(١ + \text{س}^{٢})^{٣}}$ + ث #